数学物理方程

王岗伟

河北经贸大学数学与统计学院

gangwei@hueb.edu.cn

https://wanggangwei82.github.io/

2023

内容提要

1. 热传导方程
   - 热传导方程及其定解问题的导出
   - 扩散方程
2. 初边值问题的分离变量法
   - 一个空间变量的情形
   - 初边值问题的分离变量法
   - 柯西问题
3. 热传导方程柯西问题的求解
   - 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性
   - 解的渐近性态

热传导方程及其定解问题的导出

1.热传导方程的导出　考察空间某物体G的热传导问题。以函数$u(x,y,z,t)$表示物体G在位置$u(x,y,z)$及时刻t的温度。

依据传热学中的傅里叶实验定律,物体在无穷小时段dt内沿法线方向n流过一个无穷小面积dS 的热量dQ与物体温度沿曲面dS法线方向的方问导数$\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比,即

$$dQ = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt \tag{1.1}$$

其中$k(x,y,z)$称为物体在点(x,y,z)处的热传导系数,它应取正值。(1.1)式中负号的出现是由于热量总是从温度高的一侧流向低的一侧,因此,dQ应和$\frac{\partial u}{\partial n}$异号。

热传导方程及其定解问题的导出

在物体G内任取一闭曲面Γ,它所包围的区域记为Ω,由(1.1)式,从时刻t_1到t_2流进此闭曲面的全部热量为

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int\int_{\Gamma}k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt \tag{1.2}$$

这里$\frac{\partial u}{\partial n}$表示沿$\Gamma$上单位外法线方向$n$ 的方向导数。

流入的热量使物体内部温度发生变化,在时间间隔(t_1,t_2)中物体温度从$u(x,y,z,t_1)$ 变化到$u(x,y,z,t_2)$, 它所应该吸收的热量是

$$\iiint_{\Omega}c(x,y,z)\rho(x,y,z)\Big[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)\Big]dxdydz$$

其中c为比热, p为密度。因此就成立

热传导方程及其定解问题的导出

$$\int_{t_1}^{t_2}\int\int_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt = \iiint\limits_{\Omega} c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dxdydz. \tag{1.3}$$

假设函数u关于变量x,y,z具有二阶连续偏导数,关于t具有一阶连续偏导数,利用格林公式,可以把(1.3) 式化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{\Omega}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big\}dxdydzdt$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} c\rho\Big(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt\Big)dxdydz$$

交换积分次序,就得到

热传导方程及其定解问题的导出

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{\Omega}\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydzdt=0 \tag{1.4}$$

由于t_1,t_2与区域Ω都是任意的，我们得到

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.5}$$

(1.5)式称为非均匀的各向同性体的热传导方程。如果物体是均匀的,此时k,c及ρ均为常数,记$\frac{k}{c\rho}=a^2$,即得

热传导方程及其定解问题的导出

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.6}$$

如果所考察的物体内部有热源(例如物体中通有电流,或有化学反应等情况),则在热传导方程的推导中还需考虑热源的影响。若设在单位时间内单位体积中所产生的热量为$F(x,y,z,t)$,则在考虑热平衡时,(1.3) 式左边应再加上一项

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{\Omega} F(x,y,z,t)dxdydzdt$$

于是,相应于(1.6)的热传导方程应改为

热传导方程及其定解问题的导出

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \qquad (1.7)$$

其中

$$f(x,y,z,t)=\frac{F(x,y,z,t)}{\rho c} \qquad (1.8)$$

(1.6)称为齐次热传导方程,而(1.7)称为非齐次热传导方程。

热传导方程及其定解问题的导出

2.定解问题的提法　从物理学角度来看,如果知道了物体在边界上的温度状况(或热交换状况)和物体在初始时刻的温度,就可以完全确定物体在以后时刻的温度。因此热传导方程最自然的-一个定解问题就是在已给的初始条件与边界条件下求问题的解。初始条件的提法显然为

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), \tag{1.9}$$

其中$\varphi(x,y,z)$为已知函数,表示物体在$t=0$时的温度分布。

现在考察边界条件的提法。最简单的情形为物体的表面的温度是已知的,这条件的数学形式为

$$u\left(x,y,z,t\right)\big|_{(x,y,z)\in\Gamma}=g\left(x,y,z,t\right) \tag{1.10}$$

热传导方程及其定解问题的导出

其中Γ表示物体的边界曲面,$g(x,y,z,t)$是定义在$(x,y,z)\in\Gamma, 0\leq t\leq T$上的已知函数。这种边界条件称为热传导方程的第一类边界条件(又称狄利克雷(Dirichlet)边界条件)。

我们再考察另一种情况:在物体的表面上知道的不是它的表面温度而是热量在表面各点的流速,也就是说在表面各点的单位面积上在单位时间内所流过的热量Q 是已知的。根据傅里叶定律

$$\frac{dQ}{dSdt}=-k\frac{\partial u}{\partial n}$$

就可明白,这种边界条件实际上表示温度u在表面上的法向导数是已知的。这条件的数学形式为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x,y,z)\in\Gamma}=g\left(x,y,z,t\right) \tag{1.11}$$

热传导方程及其定解问题的导出

这里$\frac{\partial u}{\partial n}$表示$u$沿边界$\Gamma$上的单位外法线方向$n$的方向导数,而$g(x,y,z,t)$是定义在$(x,y,z)\in\Gamma, 0\le t\le T$的已知函数。这种边界条件称为热传导方程的第二类边界条件(又称诺伊曼(Neumann)边界条件)。

今考察物体放在介质(例如空气)中的情形:我们能测量到的只是与物体接触处的介质温度u_1 ,它与物体表面上的温度u往往并不相同。在u_1已知时研究边界条件的提法还必须利用物理中另一个热传导实验定律(牛顿定律):从物体流到介质中的热量和两者的温度差成正比:

$$dQ = k_1(u-u_1)dSdt \tag{1.12}$$

这里的比例常数k_1,称为热交换系数,它也取正值。考察流过物体表面Γ的热量,从物质内部来看它应由傅里叶定律确定,而从介质方面来看则应由牛顿定律所决定,因此成立着关系式

热传导方程及其定解问题的导出

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt = k_1(u-u_1)dSdt$$

即

$$k_1u + k\frac{\partial u}{\partial n} = k_1u_1$$

由于k_1及k都是正数,因此这种边界条件可以写成

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_{(x,y,z)\in\Gamma} = g\left(x,y,z,t\right) \tag{1.13}$$

这里$\frac{\partial u}{\partial n}$表示$u$沿边界$\Gamma$上的单位外法线方向$n$的方向导数,而$g(x,y,z,t)$是定义在$(x,y,z)\in\Gamma, 0\le t\le T$的已知函数,$\sigma$ 为已知正数。这种边界条件称为热传导方程的第三类边界条件。

热传导方程及其定解问题的导出

和弦振动方程比较,这三类边界条件虽然从不同的物理角度分别归结出来,但在数学上的形式却完全一样。

又如果所考察的物体体积很大,而所需知道的只是在较短时间和较小范围内的温度变化情况,边界条件所产生的影响可以忽略,这时就不妨把所考察的物体视为充满整个空间, 而定解问题就变成柯西问题,此时的初始条件为

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)\quad(-\infty<x,y,z<\infty).\tag{1.14}$$

我们在此特别指出,与波动方程的情形不同,对于热传导方程的定解问题,初始条件只能给出一个。

在适当情况下,方程中描述空间坐标的独立变量的数目还可以减少。例如当物体是均匀细杆时,假如它的侧面是绝热的,也就是说不产生热交换,又假定温度的分布在同一截面是相同的,则温度函数u仅与坐标x 及时间t有关,我们就得到一维热传导方程

热传导方程及其定解问题的导出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.15}$$

同样,如考虑薄片的热传导,薄片的侧面绝热,可得二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1.16}$$

对于这种低维的热传导方程,也可以提出前述的柯西问题与初边值问题。

扩散方程

在研究分子扩散过程中也会遇到类似的方程。例如气体的扩散，液体的渗透，半导体材料中的杂质扩散等。下面，我们来导出扩散过程所必须满足的数学方程。由于扩散方程与热传导方程的导出极为相似，我们不准备重复这一过程。只要将扩散过程所满足的物理规律与热传导过程所满足的物理规律作个类比,扩散方程就不难写出。在推导热传导方程的过程中起基本作用的是傅里叶定律与热量守恒定律(即(1.1),(1.3) 式):

$$dQ = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{r} k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt = \iiint_{\Omega} c\rho\left[u\left(x,y,z,t_2\right) - u\left(x,y,z,t_1\right)\right]dxdydz,$$

扩散方程

其中诸量的意义前已说明。在考虑扩散过程时，我们遇到的是相应的扩散定律与质量守恒定律，它们的形式是

$$dm = -D(x,y,z)\frac{\partial N}{\partial n}dSdt, \tag{1.17}$$

$$\int_{1_1}^{t_2}\iint_T D\frac{\partial N}{\partial n}dSdt = \iiint_n \left[N\left(x,y,z,t_2\right) - N\left(x,y,z,t_1\right)\right]dxdydz \tag{1.18}$$

其中N 表示扩散物质的浓度，dm 表示在无穷小时段dt 内沿法线方向$\boldsymbol{n}$ 经过一个无穷小面积dS 的扩散物质的质量，式中$D(x,y,z)$ 称为扩散系数，其他符号与(1.1)(1.3) 中的意义相同。

扩散方程

将(1.17)(1.18) 与(1.1)(1.3) 比较，可见其形式是极其类似的。在考察热传导过程中引入的量Q、u、k 分别相应于扩散过程中的量m、N、D，而出现在(1.3) 式中的因子$c\rho$ 在扩散问题中相应于常数1 。于是，我们立刻可以写出扩散方程为

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial N}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial N}{\partial z}\right). \tag{1.19}$$

如果D 是常数,记$D=a^2$,扩散方程(1.19) 就化为与热传导方程(1.6) 完全相同的形式。对于扩散方程,也可以提出相应的柯西问题与初边值问题等定解问题。

一个空间变量的情形

在第一章中我们用分离变量法求得了波动方程初边值问题的解。这一方法对于热传导方程初边值问题的求解也是适用的。对于热传导方程的初边值问题,初始条件只需给一个条件,但求解过程的基本步骤仍相同。以下以热传导方程在边界上分别取第一与第三边界条件的初边值问题为例详细讨论其求解过程。我们用分离变量法求解如下的初边值问题:

$$
\begin{cases}
u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (t > 0, 0 < x < l), & (2.1) \\
t = 0 : u = \varphi(x), & (2.2) \\
x = 0 : u = 0, & (2.3) \\
x = l : u_i + hu = 0, & (2.4)
\end{cases}
$$

一个空间变量的情形

其中h 为正常数。用分离变量法求解。令

$$u(x,t)=X(x)T(t),$$

这里$X(x)$ 和$T(t)$ 分别表示仅与x 有关和仅与t 有关的函数。把它代人方程，得到

$$XT'=a^2X''T,$$

即

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

这等式只有在两边均等于常数时才成立。令此常数为$-\lambda$，则有

一个空间变量的情形

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \tag{2.5}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{2.6}$$

先考虑(2.6)。根据边界条件(2.3)、(2.4)、$X(x)$ 应当满足边界条件

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \tag{2.7}$$

对于边值问题(2.6)、(2.7), 与第一章1.3 类似的讨论可得

(i) 当$\lambda \leqslant 0$ 时, 只有平凡解$X \equiv 0$;

(ii) 当$\lambda > 0$ 时.

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{2.8}$$

一个空间变量的情形

利用边界条件$X(0)=0$, 得$A=0$. 于是由(2.7) 的第二个边界条件得到

$$B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l) = 0. \tag{2.9}$$

为使$X(x)$ 为非平凡解, λ 应满足

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{2.10}$$

即λ应是下述超越方程的正解:

$$\tan\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \tag{2.11}$$

令

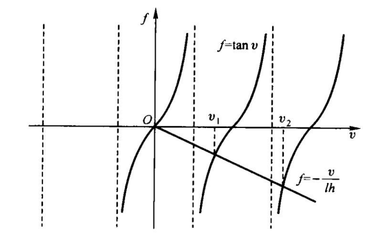
一个空间变量的情形

$$v = \sqrt{\lambda l}, \tag{2.12}$$

则(2.11) 式变为

$$\tan v = -\frac{v}{lh}. \tag{2.13}$$

利用图解法(见下图) 或数值求解法可得出这个方程的根。



一个空间变量的情形

由上图2.1知，方程(2.13) 有可列无穷多个正值$v_k > 0(k = 1, 2, \cdots)$，满足$\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < v_k < k\pi$ 。因此，特征值问题(2.6)、(2.7)存在着无穷多个固有值

$$\lambda_k = \left(\frac{v_k}{l}\right)^2 \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.14}$$

及相应的固有函效

$$X_k(x) = B_k \sin\sqrt{\lambda_k}x = B_k \sin\frac{v_k}{l}x \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.15}$$

把$\lambda = \lambda_k$，代人方程(2.5)，可得

$$T_k(t) = C_k e^{-a^2\lambda_k t} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.16}$$

一个空间变量的情形

于是得到一列可分离变量的特解

$$u_k(x,t)=A_k e^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x \quad (k=1,2,\cdots). \tag{2.17}$$

由于方程(2.1) 及边界条件(2.3)、(2.4)都是齐次的,故可利用叠加原理构造级数形式的解

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-u^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x. \tag{2.18}$$

以下来决定常数A_k, 使(2.18) 满足初始条件(2.2) 。由(2.3), 为使在$t=0$ 时$u(x,t)$ 取到初值$\varphi(x)$, 应成立

一个空间变量的情形

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\sqrt{\lambda_k}x. \qquad (2.19)$$

为确定系数A_k，须先证明固有函数系$|X_i|=\left|\sin\sqrt{\lambda_x}x\right|$ 在$[0,l]$ 上正交。设固有函数X，和X_m 分别对应于不同的固有值λ_n 和λ_m，即

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \quad X_m'' + \lambda_n X_m = 0.$$

以X_m 和X_n 分别乘上面第一式第二式，相减后在$[0,l]$ 上积分，利用X_n 和X_m 都满足边界条件(2.3)、(2.4)，就得到

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n X_m dx = \left(X_n X_m' - X_m X_n'\right)\big|_0^l = 0.$$

一个空间变量的情形

由于$\lambda_n \neq \lambda_m$, 故得固有函数系的正交性:

$$\int_a^1 X_n X_m dx = \int_0^1 \sin\sqrt{\lambda_n}x \sin\sqrt{\lambda_m}x dx = 0, \quad m \neq n. \tag{2.20}$$

记

$$\begin{aligned} M_t = \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x dx &= \int_0^l \frac{1-\cos 2\sqrt{\lambda_k}x}{2}dx \\ = \frac{l}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_k}l}{4\sqrt{\lambda_k}} &= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_k}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_k}l} \\ &= \frac{l}{2} + \frac{h}{2\left(h^2+\lambda_k\right)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

一个空间变量的情形

于是,在 两边乘以$\sin\sqrt{\lambda_1}x$,再进行积分,利用正交性(2.20) 即可得

$$A_k = \frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi d\xi. \tag{2.22}$$

将它代人(2.18) 式, 就得到初边值问题(2.1)-(2.4) 的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{M_k}\int_0^t \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi d\xi\cdot e^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x. \tag{2.23}$$

为了考察由分离变得法得到的形式解是否是混合问题(2.1)-(2.4)的经典解, 还得进行验证。

一个空间变量的情形

以下证明，当$\varphi(x)$ 为有界函数时，由(2.23) 式给出的形式解，当$t>0$ 时，关于x 及t 是任意次连续可导的,并且满足方程(2.1) 及边界条件(2.3)、(2.4)。事实上,与第一章波动方程情形有很大不同，表达式(2.23)中含有因子$e^{-\alpha^2\lambda_i t}$，因此对任意$\delta>0$，当$t\geqslant\delta$ 时，对任意$p>0$ 缓数$\sum_{t=1}^{\infty}\lambda ie^{-a^2\lambda_p t}$ 均是一致收敛的。而由φ 为有界函数的假设($|\varphi(x)|\leqslant M$) 及(2.21) 式，可得

$$\left|\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi d\xi\right|\leqslant Ml \quad 及 \quad \frac{1}{M_k}\leqslant\frac{2}{l}. \tag{2.24}$$

一个空间变量的情形

因而，由(2.23) 表示的级数，当$t>0$ 时，关于x 及t 是无穷次可导的，并且求导与求和可以交换。由于级数的每一项都满足方程(2.1) 及边界条件(2.3)、(2.4)，从而(2.23)式表示的级数在$t>0$ 时确实满足方程及边界条件。为了保证当$t\to 0$ 时，对任意的$x\in[0,t]$，由(2.23) 式给出的级数趋于初值$\varphi(x)$，还需要对$\varphi(x)$加上进一步的条件。例如在$\varphi(x)\in C'+\varphi(0)=0,\varphi'(l)+h\varphi(l)=0$ 时，可以证明，由(2.23) 式给出的级数确实是初边值问题(2.1)-(2.4)的经典解。关于此点的详细证明，此处从略。

初边值问题的分离变量法

2. 圆形区域上的热传导问题　我们再举一例子,研究圆柱形区域或两侧绝热的圆板上的热传导问题。设侧边的温度保持为常数,此时热传导问题可以归结为求解下述的定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) \\ u|_{r^2+y^2=R^2} = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

用分离变量法解这个问题。先令

$$u(x,y,t) = T(t)V(x,y) \tag{2.26}$$

我们得到下面两个关于函数$T(t)$和$V(x,y)$的方程

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{2.27}$$

初边值问题的分离变量法

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\lambda V=0 \tag{2.28}$$

其中λ的意义与前例相同。因此

$$T(t)=Ae^{-\lambda t} \tag{2.29}$$

为了研究方程(2.28)满足边界条件$V|_{r^2+y^2=R^2}=0$的固有值及固有函数问题,我们再将$V(x,y)$写成极坐标$V(r,\sigma)$的形式,并进行分离变量。注意到(2.28) 式的极坐标形式为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\lambda V=0 \tag{2.28'}$$

令

$$V(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta) \tag{2.30}$$

初边值问题的分离变量法

就可以由(2.28')得到

$$\Theta''(\theta)+\mu\Theta(\theta)=0 \tag{2.31}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\mu)R(r)=0 \tag{2.32}$$

其中μ为与r,θ无关的常数。由于V 的单值性,$\Theta(\theta)$必须具有周期2π ,因此,只能等于如下的整数:

$$0,1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots$$

对应于这些μ_n,有

$$\Theta_0(\theta)=\frac{a_0}{2},\Theta_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.33}$$

初边值问题的分离变量法

现在考察方程(2.32)。$R(r)$在$r=0$处应当有界,又由于$V|_{r^2+y^2=R^2}=0$,则$R(r)$应当满足边界条件$R(r)|_{r=R}=0$。作代换$\rho=r\sqrt{\lambda}$, 以$\mu_n=n^2$代入,即得到n阶贝塞尔(Bessel)方程

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\rho^2-n^2)R(\rho)=0$$

如果要求这方程的解在原点$\rho=0$处为有界,那么这种解除去一常数因子外是唯一确定的,它就是第一类n 阶贝塞尔函数$J_n(\rho)$。

贝塞尔函数$J_n(\rho)$有无穷多个正根,分别记为

$$\mu_1^n,\mu_2^n,\cdots,\mu_m^n,\cdots$$

对于它们成立$J_n(\mu_m^n)$。为了使$J_n(\rho)$在$r=R$处等于零,必须取

$$R\sqrt{\lambda}=\mu_m^{(n)} \quad 或 \quad \sqrt{\lambda}=\frac{\mu_m^{(n)}}{R} \tag{2.34}$$

初边值问题的分离变量法

故得

$$J_n(\rho) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r\right) \tag{2.35}$$

这样,原来的方程的解就可以形式地表示为

$$\begin{aligned} u\left(x, y, t\right) &= u\left(r, \theta, t\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\right)^2 t}\left(a_n^{(m)}\cos n\theta + b_n^{(m)}\sin n\theta\right) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

为决定$a_n^{(m)}$及$b_n^{(m)}$,我们要用初始条件

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$$

初边值问题的分离变量法

利用贝塞尔函数的性质可以知道,对于任意给定的正整数n ,贝塞尔函数$J_n(\mu_m^{(n)})(m=1,2,\cdots)$在区间[0,1] 上是带权$x$的标准正交系,即对任意给定的正整数$m,k$, 成立

$$\int_0^1 xJ_n\left(\mu_m^{(n)}x\right)J_n\left(\mu_k^{(n)}x\right)dx=\begin{cases}1, & 当m=k\\ 0, & 当m\neq k.\end{cases}$$

此外对于给定的任意的n ,函数系$\{J_n\left(\mu_k^{(n)}x\right)\}$按带权$x$ 的均方模在空间$L^2[0,1]$ 上是完备的。又知道三角函数系$1,\sin n\theta,\cos n\theta(n=1,2,\cdots)$ 全体在$[0,2\pi]$ 上是正交的,且在空间$L^2[0,2\pi]$中亦是完备的。因此,由它们所组成的函数系

$$J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}-r\right)\cos n\theta,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}-r\right)\sin n\theta\quad(n=0,1,2,\cdots;m=1,2,$$

初边值问题的分离变量法

在空间$L^2\{0 \le \theta \le 2r, 0 \le r \le R\}$ 内构成带权r的正交完备系，于是$\varphi(r,\theta)$可展开为级数形式

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\varphi_n^{(m)}\cos n\theta + \psi_n^{(m)}\sin n\theta)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) \qquad (2.37)$$

从而取(2.36)中的$a_n^{(m)}$及$b_n^{(m)}$ 分别为$\varphi_n^{(m)}$及$\psi_n^{(m)}$就可以决定初边值问题(2.25)的解$u(x,y,t)$。

柯西问题

上节中我们以傅里叶级数为工具导出了热传导方程初边值问题的解,类似于这个想法，我们利用傅里叶变换来求解热传导方程的柯西问题。在本节中求出解的表达式的过程也只是形式推导的过程,通过本节末尾的验证,方知其确是所求的柯西问题的解。

1. 傅里叶变换及其基本性质　设$f(x)$是定义在$(-\infty,\infty)$上的函数,它在$[-l,l]$上有一阶连续导数,则$f(x)$可以展开为傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{3.1}$$

并且

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi d\xi,b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi(n=0,1,2,\cdots) \tag{3.2}$$

柯西问题

将(3.2)代入(3.1)式，得到

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\xi)d\xi$$

现在设函数$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上绝对可积,当$l\to\infty$时,由上式可得

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\xi)d\xi$$

如记$\lambda_1=\frac{\pi}{l},\cdots,\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\cdots,\Delta\lambda=\Delta\lambda_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n=\frac{\pi}{l}$，则可以得到

柯西问题

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n \int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\lambda_n(x-\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

积分表达式(3.3)称为$f(x)$的傅里叶积分.可以证明,若$f(x)$绝对可积,则在$f(x)$ 本身及其导数为连续的点,$f(x)$的傅里叶积分收敛于$f(x)$在该点的函数值。

(3.3)式也可以写成复数形式。由于$\cos\lambda(x-\xi)$是λ的偶函数,$\sin\lambda(x-\xi)$是λ的奇函数,可以将(3.3)式写成

柯西问题

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\Big[\cos\lambda(x-\xi) + i\sin\lambda(x-\xi)\Big] d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int (\xi)\, e^{i\lambda(i-\xi)} d\xi.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

于是，若令

$$
g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \tag{3.5}
$$

就有

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda\xi} d\lambda \tag{3.6}
$$

柯西问题

称$g(\lambda)$为$f(x)$的傅里叶变换,记为$F[f]$; 称$f(x)$为$g(\lambda)$ 的傅里叶逆变换,记为$F'[g]$.当$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续可导且绝对可积时,它的傅里叶变换存在,且其逆变换等于$f(x)$。

为了应用傅里叶变换求解数学物理方程问题,我们介绍所需用到的-些关于傅里叶变换的基本性质.这里假设在下面诸式中所出现的傅里叶变换总是存在的。

性质1　傅里叶变换是线性变换,即对于任意复数α,β以及函数f_1,f_2 ,成立

$$F[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha F[f_1]+\beta F[f_2]. \tag{3.7}$$

如果对给定的$f_1(x),f_2(x)$,当$x\in(-\infty,\infty)$时,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-t)f_2(t)dt \tag{3.8}$$

柯西问题

存在,则称$f(x)$为$f_1(x)$与$f_2(x)$的卷积,记为$f_1 * f_2$。显然,$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$,即卷积是可以交换的。

关于卷积的傅里叶变换有性质,$f_1(x)$和$f_2(x)$的卷积的傅里叶变换等于丁,$f_1(x)$和$f_2(x)$的傅里叶变换的乘积,即

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2] \tag{3.9}$$

由于$f_1(x)$和$f_2(x)$在$(-\infty,\infty)$上绝对可积,积分次序可以交换,因而

$$\begin{aligned} F[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)\, e^{-i\lambda \imath} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\, e^{-i\lambda(t+\xi)} d\xi \end{aligned}$$

柯西问题

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{2} \left(\ t \ \right) e^{-i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \left(\ \xi \ \right) e^{-i\lambda \xi} d\xi$$

$$= F[f_1] \cdot F[f_2].$$

从傅里叶变换和逆变换公式之间的相似性,可以类似地得到

性质3　$f_1(x)$和$f_2(x)$的乘积的傅里叶变换等于$f_1(x)$和$f_2(x)$的的傅里叶变换的卷积乘以$\frac{1}{2\pi}$,即

$$F[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi} F[f_1] * F[f_2]. \tag{3.10}$$

性质4　如果$f(x)$,$f'(x)$都是可以进行傅里叶变换的,而且当$|x| \to \infty$时, $f(x) \to 0$,则成立

$$F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)]. \tag{3.11}$$

柯西问题

证　事实上

$$
\begin{aligned}
F[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda t}dx \\
&= [f(x)e^{-i\lambda t}]|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda f(x)e^{-i\lambda t}dx \\
&= i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda F[f(x)].
\end{aligned}
$$

同样可以证明

性质5　如果$f(x)$及$xf(x)$都可以进行傅里叶变换,那么

$$
F[-ixf(x)] = \frac{d}{d\lambda}F[f]. \tag{3.12}
$$

柯西问题

$$
\begin{aligned}
F[-ixf(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-i\lambda x}dx \\
&= \frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{d}{d\lambda}F[f].
\end{aligned}
$$

完全类似地可以定义多个自变量函数的傅里叶变换:

$$
F[f] = g(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_s)e^{-i(x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n)}dx_1 \tag{3.13}
$$

相应地,傅里叶逆变换定义为

$$
f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)e^{i(x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n)}d\lambda_1 \cdots \tag{3.14}
$$

热传导方程柯西问题的求解

现在利用傅里叶变换来解热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & (3.15) \\ u(x,0) = \varphi(x). & (3.16) \end{cases}$$

视 t 为参数，先求解齐次热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (3.17) \\ u(x,0) = \varphi(x). & (3.18) \end{cases}$$

关于 x 进行傅里叶变换，记

$$F[u(x,t)] = \widetilde{u}(\lambda,t),$$
$$F[\varphi(x)] = \widetilde{\varphi}(\lambda).$$

热传导方程柯西问题的求解

在 (3.17) 两边关于 x 进行傅里叶变换，利用性质 4，就得到

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}t} = -a^2\lambda^2\widetilde{u}, \tag{3.19}$$

类似地，由 (3.18) 式得

$$\widetilde{u}(\lambda, 0) = \widetilde{\varphi}(\lambda). \tag{3.20}$$

(3.19)、(3.20) 是带参数 λ 的常微分方程的柯西问题，它的解为

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \widetilde{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{3.21}$$

函数 $e^{-a^2\lambda^2 t}$ 的傅里叶逆变换为

热传导方程柯西问题的求解

$$F^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\alpha^2\lambda^2 t - i\lambda x\right)}\mathrm{d}\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2 t\left(\lambda - \frac{ix}{2a^2 t}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

利用复变函数的积分计算知

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2 t\left(\lambda - \frac{ix}{2a^2 t}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2 t\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda$$
$$= \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}.$$

所以

热传导方程柯西问题的求解

$$F^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\right] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

因此，利用性质 2，由 (3.20) 可得柯西问题 (3.17)–(3.18) 的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}\xi. \tag{3.22}$$

再求解非齐次热传导方程具齐次初始条件的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & (3.23)\\ u(x,0) = 0. & (3.24)\end{cases}$$

热传导方程柯西问题的求解

由齐次化原理，此柯西问题的解可写为（请读者验证）

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{3.25}$$

其中 $w=w(x,t;\tau)$ 为下述柯西问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t>\tau, & (3.26)\\ w(x,\tau)=f(x,\tau). & (3.27)\end{cases}$$

于是，利用 (3.22) 式，易知柯西问题 (3.23)–(3.24) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{3.28}$$

热传导方程柯西问题的求解

由叠加原理、(3.22) 及 (3.28) 就得到柯西问题 (3.15)–(3.16) 的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, \mathrm{d}\xi \\ & + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.29}$$

柯西问题

3. 解的存在性　在上面的推导中,由于预先不知道u是否满足进行傅里叶变换及有关运算的条件,所得的解还只是形式解。为证明(3.29)确实是柯西问题(3.15)—(3.16)的解，还得进行验证。下面我们只对齐次方程的情形进行验证,即指出在$\varphi(x)$连续且有界的条件下,(3.22)式的确为柯西问题(3.17)—(3.18) 的解。公式(3.22)称为泊松公式,其右端的积分则称为泊松积分。

设$|\varphi(x)| \le M$,则注意到$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$, 由(3.22)式得

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| \le & M\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \\
= & M\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta = M(\zeta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}})
\end{aligned}
$$

柯西问题

这说明积分(3.22)是收敛的,并且由它所表达的函数$u(x,t)$是有界的(且与初值有同样的界)。

现在证明,当$t>0$时,积分(3.22)所表达的函数$u(x,t)$满足方程(3.17)。我们看到,积分号下的函数

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

对变量t,x而言(视ξ为参量),当$t>0$时满足方程(3.17)。因此,我们只要证明,当$t>0$时出现在方程(3.17)中的导数可以用在(3.22)式的积分号下求导的方法来计算。由于(3.22)式中的积分限是无穷的,为了保证通过积分号求导的可能性,必须证明在积分号下求导后所得的积分是一致收敛的。这一点是不难验证的。以对x 的一阶偏导数为例,将被积函数对x一次求导后所构成的积分写为

柯西问题

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-(x-\xi)\varphi(\xi)}{2a^2t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

它在$t\geq t_0>0$ t_0为任意正数)的范围内总是一致收敛的。因此当$t>0$时成立

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-(x-\xi)\varphi(\xi)}{2a^2t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

即对x的一次求导能通过积分号。同理可以证明对(3.22)的其他偏导数也能用在积分号下求导而得到。因此当$t>0$ 时由积分(3.22)所表达的函数$u(x,t)$ 满足方程(3.17)。

剩下只要证明,由(3.22)所确定的函数满足初始条件(3.18),也就是要证明对任何x_0,当$t\to 0, x\to x_0$时$u(x,t)\to\varphi(x_0)$。为此,要证明对任意给定的$\varepsilon>0$, 一定可找到$\delta>0$,

柯西问题

使当$|x-x_0|\leq\delta, t\leq\delta$时,成立着

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)|\leq\varepsilon$$

在(3.22)中令$\zeta=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$,得到

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\sqrt{t}\zeta)e^{-\xi^2}d\zeta$$

又$\varphi(x_0)$可以写成

$$\varphi(x_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_0)e^{-\xi^2}d\zeta$$

因此,

$$u(x,t)-\varphi(x_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+2a\sqrt{t}\zeta)-\varphi(x_0)]e^{-\xi^2}d\zeta$$

柯西问题

对于所给的$\varepsilon > 0$,取$N > 0$足够大,使

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi \leq \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N} e^{-\xi^2}d\xi \leq \frac{\varepsilon}{6M}$$

固定N ,由$\varphi(x)$的连续性,可找到$\delta > 0$,使当$|x - x_0| \leq \delta, t \leq \delta$时成立

$$|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (-N \leq \xi \leq N).$$

因此

$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| = |\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x + 2a\sqrt{t}\xi) - \varphi(x_0)]e^{-\xi^2}d\xi|$$

柯西问题

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}|\varphi(x+2a\sqrt{t}\xi)-\varphi(x_0)|e^{-\xi^2}d\xi\\
&+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-\xi^2}d\xi+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty}e^{-\xi^2}d\zeta\\
&\le \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-\xi^2}d\zeta+4M\frac{\varepsilon}{6M}\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这样,我们就验证了由泊松积分(3.22)所确定的函数$u(x,t)$确实是柯西问题(3.17)-(3.18)的有界解。关于(3.18)所表示的函数满足非齐次方程(3.15)及初始条件(3.16),可类似地作出证明,作为习题留给读者。

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

1. 极值原理　极值原理是描述扩散、传导等现象的热传导方程的重要特性。以热传导过程为例,如果物体的边界温度及其初始温度都不超过某值M,而且物体内部没有热源,则这物体内就不可能产生大于M的温度。和这个事实相对应,我们对齐次热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

证明下面的

定理4.1(极值原理)　设$u(x,t)$在矩形$R_T\{\alpha\leq x\leq\beta,\ 0\leq t\leq T\}$上连续,并且在矩形内部满足热传导方程(4.1), 则它在矩形的两个侧边$(x=\alpha$及$x=\beta, 0\leq t\leq T)$ 及底边$(t=0,\alpha\leq x\leq\beta)$上取到其最大值和最小值。换言之,如果以$\Gamma_T$, 表示$R_T$ 的两侧边及底边所组成的边界曲线(通称为抛物边界) ,那么成立着

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

$$\max_{R_\tau} u(x,t) = \max_{\Gamma_\tau} u(x,t), \quad \min_{R_\tau} u(x,t) = \min_{\Gamma_\tau} u(x,t)$$

证因为将$-u$代替u ,最小值的情形就变为最大值的情形,所以只需考虑最大值的情形就可以了。

以下用反证法证明所需的结论。以M表示函数$u(r,t)$在R_T上的最大值,以m表示函数$u(x,t)$在边界Γ_T上的最大值。如果定理不真,那么$M > m$。此时在R内一定存在着一点(x^*,t^*) $(t^*, \alpha < x^* < \beta)$,使函数$u(x,t)$在该点取值$M$。作函数

$$V(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{4l^2}(x-x^*)^2$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

其中$l=\beta-\alpha$。由于在Γ_T

$$V(x,t)<m+\frac{M-m}{4}=\frac{M}{4}+\frac{3}{4}m=\theta M \quad (0<\theta<1)$$

而

$$V(x^*,t^*)=M$$

因此,函数$V(x,t)$和$u(x,t)$一样,它不在Γ_T上取到最大值。设$V(x,t)$ 在R_T中的某一点(x_1,t_1) 上取到最大值$(t_1>0,\ \alpha<x_1<\beta)$,则在此点应有$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\leq 0, \frac{\partial V}{\partial t}\geq 0$(如果$t_1<T$, 则$\frac{\partial V}{\partial t}=0$;如果$t_1=T$, 则$\frac{\partial V}{\partial t}\geq 0$;),因此在点$(x_1,t_1)$处,

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\geq 0$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

但由直接计算并利用(4.1)式得

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{M-m}{2l^2}=-a^2\frac{M-m}{2l^2}<0$$

这就得到矛盾。它说明原先的假设是不正确的。证毕。

注　由定理1的证明可见,若u是非齐次热传导方程$u_t-u_{xx}=f$(其中$f\le 0$)的解,则仍成立$\max_{R_T}u=\max_{\Gamma_T}u$

2.初边值问题解的唯一性和稳定性，利用上面的极值原理,立刻可得到下述的

定理4.2　热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \\ u(x,0)=\varphi(x), \\ u(a,t)=\mu_1(t), u(\beta,t)=\mu_2(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

在区域R_T上的解是唯一的,而且连续地依赖于边界Γ_T,上所给定的初始条件及边界条件。

证　假设问题(4.2)有两个解u_1及u_2,则其差$u = u_1 - u_2$。在区域R_T内满足齐次方程(4.1) ,而在Γ_T上取零值.于是由上述的极值原理得到在R_T上$u \equiv 0$, 即这两个解在R_T上全同。

其次,如果初边值问题的两个解u_1和u_2在Γ_T上满足

$$|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$$

则由极值原理得到在R_T内也成立着

$$|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$$

这就证明了轫边值问题(4.2)的解的稳定性。证毕。

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

定理4.1中所证明的极值原理还不能直接应用于热传导方程具第二或者第三类边界条件的初边值问题。因此,为了得到问题(2.1)—-(2.4)的解的唯一性与稳定性,还需要作进–步的讨论。

考虑下列初边值问题

$$\begin{aligned} &u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ &u|_{t=0} = \mu_1(t), \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)|_{i-l} = \mu_2(t), \\ &u|_{t=0} = \varphi(x), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中h是已给的正常数。我们要估计其解$u(x,t)$的取值范围。为此,令

$$v(x,t) = e^{-\lambda t} u \tag{4.4}$$

其中$\lambda > 0$为一个任意给定的正常数。由(4.3)易知v满足

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

$$\begin{aligned}
&v_t - a^2 v_{xx} + \lambda v = 0,\\
&v|_{t=0} = e^{\lambda t}\mu_1(t), (\frac{\partial v}{\partial x} + hv)|_{i-l} = e^{-\lambda t}\mu_2(t),\\
&v|_{t=0} = \varphi(x),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

对任意满足$0 \leq t_1 \leq T$的t_1,记R_{t_1} 为矩形$\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_1\}$,并记$\Gamma_{t_1}$为$R_{t_1}$的两侧及底边所组成的抛物边界,考虑$v$在$R_{t_1}$ 上的最大值。首先可断言,如果$v(x,t)$ 在R_{t_1}上有正的最大值,则这个最大值必在Γ_{t_1}上达到。事实上,假设v 在$(x_0\ ,t_0)$处(这里$0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \leq t_1$)达到正的最大值,则由函数取极值的必要条件知,在此点有

$$v_t \geq 0, \quad v_{x,t} \leq 0, 且v > 0$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

从而(4.5)第一式不可能成立,这说明v的正极大值只可能在Γ_{t_1}上达到。

如果v的正极大值在$t=0$时达到,则有

$$v \le \max_{0\le x\le 1} \varphi$$

如果v的正极大值在$x=0$时达到,则有

$$v \le \max_{0\le t\le t_1} e^{-\lambda t}\mu_1(t)$$

而如果v的正最大值在$x=l, t=t_0(0\le t_0\le t_1)$时达到,在该点应有$v_x\ge 0$,从而由$x=l$处的边界条件可得

$$v \le v(l,t_0) \le \frac{e^{-\lambda t_0}}{h}\mu_2(t_0) \le \max_{0\le t\le t_1}\frac{e^{-\lambda t}\mu_2(t)}{h}$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

再考虑到v在R_{t_1}中非正的可能性,就可以得到:对任意的$(x,t)\in R_{t_1}$,成立

$$v(x,t)\le \max(0,\max_{0\le x\le l}\varphi(x),\max_{0\le t\le t_1}(e^{-\lambda t}\mu_1(t),\frac{e^{-\lambda t}\mu_2(t)}{h}))$$

于是

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{\lambda t}v(x,t)\\ &\le e^{\lambda t_1}\max(0,\max_{0\le x\le l}\varphi(x),\max_{0\le t\le t_1}(e^{-\lambda t}\mu_1(t),\frac{e^{-\lambda t}\mu_2(t)}{h})). \end{aligned} \tag{4.6}$$

对v的最小值进行类似的讨论可得

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

$$u(x,t) \geq e^{\lambda t_1} \min(0, \min_{0\leq x\leq l} \varphi(x), \min_{0\leq t\leq t_1} (e^{-\lambda t}\mu_1(t), \frac{e^{-\lambda t}\mu_2(t)}{h})). \tag{4.7}$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

定理4.3 对任意给定的$T>0$,热传导方程的初边值问题(4.3)在R_{t_1}上的解是唯一的,且连续地依赖于初值$\varphi(x)$ 及边界函数$\mu_1(t)$,$\mu_2(t)$。

证 假设初边值问题(4.3)有两个解u_1及u_2,则其差$u=u_1-u_2$满足齐次方程及齐次初边界条件,于是由(4.6)及(4.7)得到在R_T 上$u\equiv 0$。唯-性得证。为证连续依赖性,假设对$x\in[0,1],0\leq t\leq T$成立

$$-\varepsilon\leq\varphi(x)\leqslant\varepsilon,-\varepsilon\leq\mu_1(t)\leq\varepsilon,-\varepsilon\leq\mu_2(t)\leq\varepsilon$$

则由(4.6)及(4.7)式(在其中取$\lambda=1$),有

$$-e^{\tau}\max\left(1,\frac{1}{h}\right)\varepsilon\leqslant u(x,t)\leqslant e^{\tau}\max\left(1,\frac{1}{h}\right)\varepsilon \qquad (4.8)$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

连续依赖性得证。证毕。注意到估计式(4.6)及(4.7)要求$h>0$),因而还不能直接用来讨论下面的具有第二类边界条件的初边值问题的解的唯一性与稳定性:

$$\begin{cases} u_i - a^2 u_{i,i} = 0, & 0<x<l, t>0, \\ u|_{i-0} = \mu_1(t), & u_i|_{i-t} = \mu_2(t), \\ u|_{i-0} = \varphi(x). \end{cases} \tag{4.9}$$

为讨论(4.9),我们可用未知函数的线性变换

$$\tilde{u} = w(x)u \tag{4.10}$$

将关于u的问题(4.9) 转化为对$\tilde{u}$的问题(4.3),从而可得到问题(4.9)的解的唯一性与稳定性。为此,取

$$w(x) = l - x + 1 \tag{4.11}$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

易见$w \geq 1$，$w_x = -1$。经过简单的计算可知,$\tilde{u}$满足下列方程

$$\tilde{u}_t - a^2\tilde{u}_{xx} - \frac{2a^2}{l-x+1}\tilde{u}_x - \frac{2a^2}{(l-x+1)^2}\tilde{u} = 0 \tag{4.12}$$

而相应的初始条件与边界条件变为

$$\tilde{u}\,|_{x=0} = \tilde{\mu}_1 = (l+1)\,\mu_1, \quad (\tilde{u}_x + \tilde{u})\,|_{x=l} = \mu_2 \tag{4.13}$$

$$\tilde{u}\,|_{t=0} = \tilde{\varphi} = w(x)\varphi(x) \tag{4.14}$$

这时$\tilde{u}$在$x = l$处的边界条件已是第三类边界条件(其中$h = 1$)。虽然方程(4.12) 比原来的热传导方程复杂一些,但只要在变换

$$v = e^{-\lambda t}\tilde{u}$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

中取$\lambda > 2a^2$,则前面对初边值问题(4.5)的讨论,仍可适用,从而估计式(4.6)、(4.7)对$\tilde{u}$仍然成立。再由变换式(4.10),立即可得

定理4.4　对任意给定的$T > 0$,热传导方程的初边值问题(4.9)在R_{t_1}上的解是唯- 一的,而且连续地依赖于初值$\varphi(x)$及边界函数$\mu_1(t)$,$\mu_2(t)$。

3.柯西问题解的唯一性和稳定性　现在考察热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \end{cases} \tag{4.15}$$

在讨论无界直线上的问题时,一般要求温度的分布是有界的,因此对于柯西问题(4.15)中的未知函数$u(x,t)$要加上在整个区域上为有界的假设,即要求存在着某一正常数B,使对任何$t \geq 0$,$-\infty <$ $x < \infty$,都有$|u(x,t)| \leq B$.

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

以下就在具有这种性质的函数类中讨论柯西问题解的唯性和稳定性。我们要证明下面的

定理4.5　柯西问题(4.15)在有界函数类中的解是唯-一的,而且连续依赖于所给的初始条件。

证　先证明有界解的唯一性。假设柯西问题(4.15)有两个有界解u_1及u_2 ,则其差$u=u_1-u_2$满足齐次方程(4.1)及零初始条件$u(x,0)=0(-\infty<x<\infty)$,我们证明,在整个区域$t\geq 0$,$-\infty<x<\infty$上$u(x,t)=0$。尽管函数$u$是有界的:$|u|\leq 2B$,但由于区域是无界的,函数$u(x,t)$可能在任何地方都达不到它的最大值与最小值,因此我们不能直接应用前面的极值原理。

为了应用极值原理来证明唯一性,对于上半平面的任何一点(x_0,t_0), $t_0>0$, 我们考虑下面的矩形区域

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

$$R_0 : 0 \leqslant t \leqslant t_0, \mid x - x_0 \mid \leqslant L$$

其中L是一个任意给定的正数。作函数

$$v(x,t) = \frac{4B}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right)$$

它在区域R_0上是连续的,在R_0内部满足方程(4.1),而且

$$v(x,0) = \frac{2B(x-x_0)^2}{L^2} \geqslant 0 = u(x,0),$$

$$v(x_0 \pm L, t) \geqslant 2B \geqslant u(x_0 \pm L, t),$$

因此在R_0的下底及侧边上成立着不等式

$$v(x,t) \geq u(x,t)$$

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

于是由定理4.1知道在区域R_0上也成立着

$$v(x,t) \geq u(x,t)$$

即,

$$\frac{4B}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2}+a^2t\right)u(x,t) \geq u(x,t)$$

同理我们可证明在区域R_0上成立着

$$u(x,t) \geqslant -\frac{4B}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2}+a^2t\right)$$

特别取(x_0,t_0)点,就得到

$$\mid u\left(x_0,t_0\right)\mid \leqslant \frac{4B}{L^2}a^2t_0$$

但由于L是任意的,令$L\rightarrow\infty$,就得

极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

$$u(x_0, t_0) = 0$$

又因为(x_0, t_0)是上半平面的任一点,故在整个区域中$u(x\ ,t) = 0$,这就证明了解的唯一性。

下面,我们证明柯西问题的有界解对初始条件的连续依赖性。为此,只须证明当$|\varphi(x)| \leq \eta$时,在整个区域$t \geq 0, -\infty < x < \infty$上$|u(x,t)| \leq \eta$。这可和证明解的唯一性完全同样地进行证明,而只要取函数

$$v(x,t) = \frac{4B}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right) + \eta$$

来代替原来的辅助函数就可以了。因此,对有界解来说,柯西问题的稳定性也成立。

解的渐近性态

本节讨论当时间$t \to +\infty$ 时,热传导方程初边值问题及柯西问题解的渐近性态。

1. 初边值问题解的渐近性态

先讨论初边值问题(2.1)—(2.4)。由第2节的讨论,当初始函数$\varphi(x)$满足$\varphi(x) \in C^1$,$\varphi(0) = 0$,$\varphi'(l) + h\varphi(l) = 0$ 时,我们用分离变量法得到了一个用级数表示的经典解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\lambda_k^t} \sin\sqrt{\lambda_k}x \tag{5.1}$$

其中

$$A_k = \frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi d\xi, \tag{5.2}$$

解的渐近性态

$$M_k=\frac{l}{2}+\frac{h}{2(h^2+\lambda_k)},\tag{5.3}$$

而λ_k为下列超越方程

$$\tan(\sqrt{\lambda}l)=-\frac{\sqrt{\lambda}}{h}\tag{5.4}$$

的解,它满足$\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}<\lambda_k<\frac{k^2\pi^2}{l^2}$。再有上节关于唯一性的讨论，当$\varphi$满足前述条件时,问题(2.1)—(2.4)的解必定由级数(5.1) 给出。

定理5.1　假设初始函数$\varphi(x)$满足$\varphi\in C^1,\varphi(0)=0,\varphi'(l)+h\varphi(l)=0$。则当$t$趋于无穷时,问题(2.1)-(2.4) 的唯一的经典解指数衰减地趋于零,确切地说,当$t\to+\infty$时，对一切$x\in[0,l]$

解的渐近性态

$$| u(x,t) | \leqslant Ce^{-a^2\lambda_1} \to 0, \tag{5.5}$$

其中C为一个与解无关的正常数。证由前面的讨论,唯一的经典解由(5.1)式给出。由(5.2)、(5.3)可知,对一切k,

$$|A_k| \leq C_1 \tag{5.6}$$

其中C_1为仅与φ的最大模有关的常数。由λ_k所满足的估计式可知,当$k \to \infty$时$\lambda_k = O(k^2)$,故有$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_1} < +\infty$。另一方面,由指数函数的性质可知,当$t \geq 1$ 时,对一切$k \geq 2$成立

$$(\lambda_k - \lambda_1)e^{a^2(\lambda_k-\lambda_1)t} \leqslant (\lambda_k - \lambda_1)e^{-a^2(\lambda_k-\lambda_1)} \leqslant C_2, \tag{5.7}$$

解的渐近性态

其中C_2为一个与k无关的正常数。于是当$t \geq 1$时,对一切$x \in [0.l]$,成立

$$\begin{aligned} | u(x,t) | &\leqslant C_1(1+\sum_{k=2}^{\infty} e^{-a^2(\lambda_k-\lambda_1)t})e^{-a^2\lambda_1 t} \\ &\leqslant C_1(1+\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_1)e^{a^2(\lambda_k-\lambda_1)t}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_1})e^{-a^2\lambda_1 t} \\ &\leqslant C_1(1+C_2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_1})e^{-a^2\lambda_1 t} \leqslant Ce^{-a^2\lambda_1 t}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

证毕

2.柯西问题解的渐近性态

解的渐近性态

下面转而讨论热传导方程柯西问题解的渐近性态。由前二节的讨论可知,当$\varphi(x)$为有界连续函数时,热传导方程的柯西问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.10}$$

的唯一解由下列的泊松积分给出:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{5.11}$$

为了讨论解的渐近性态,还需对加上φ进一步的条件。如果$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx$收敛,则称$\varphi \in L^1(R)$并记

$$\| \varphi \|_{L^1(R)} = \int_{-\infty}^{+\infty} | \varphi(x) | \, dx \tag{5.12}$$

解的渐近性态

定理5.2　设是有界连续函数,且$\varphi \in L^1(R)$,则柯西问题(5.9)的唯一经典解具有如下的渐近性态:对一切$x \in R,\ t > 0$, 当$t \to +\infty$ 时,一致地成立

$$| u(x,t) | \leqslant Ct^{\frac{1}{2}} \to 0 \tag{5.13}$$

其中C为一个仅与a及$\| \varphi \|_{L^1(R)}$有关的正常数。

证　由(5.11)式

$$| u(x,t) | \leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} | \varphi(\xi) | e^{\frac{(a-\xi)^2}{4a^2}} d\xi \leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} | \varphi(\xi) | d\xi = Ct^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.14}$$

证毕。对二维和三维热传导方程的柯西问题,同样容易证明,它们的解分别具有t^{-1} 及$t^{-\frac{3}{2}}$主的衰减率(作为习题)。

解的渐近性态

由上面的讨论可见,在$t \to +\infty$时,热传导方程初边值问题的解具有指数衰减率,而热传导方程的柯西问题的解具有$t^{\frac{n}{2}}$的衰减率,其中n 为空间变量的维数。